Nachhilfestunde 4

$$f_t(x) = \left(\tfrac{1}{2} - \cos(x)\right)^2$$

Zur Untersuchung einer Kosinus-Funktion und Zusatzaufgaben

Niveau: Gymnasium, eher LK

KEIN ANFÄNGERTEXT

Datei Nr. 47024

Stand 14. April 2025

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

VORWORT

In dieser Nachhilfestunde, die in 9 Abschnitte gegliedert ist, geht es um die Funktion $f(x)=(0{,}5-\cos(x))^2$. Wir besprechen Methoden zur Untersuchung der Funktion, mit interessanten Zusatzaufgaben.

Die Lösungen sind teilweise auf LK-Niveau.

Wichtige Fakten werden als Grundwissen mit $\boxed{\text{GW}}$ gekennzeichnet.

Inhalt

Diese Inhalte werden besprochen:

1 Gegeben ist die Funktion $f(x) = (0{,}5 - \cos(x))^2$ für $x \in \mathbb{R}$. K ist der Graph von f.

Untersuche das Symmetrieverhalten von f.

GW Bei dieser Fragestellung sucht man in aller Regel nur, ob K symmetrisch zur y-Achse oder zum Ursprung ist.

Der Ansatz ist gut zu merken: Man berechnet $f(-x)$ und entscheidet dann:

Wenn für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt $f(-x) = f(x)$, dann ist K **symmetrisch zur y-Achse.**

Wenn für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt $f(-x) = -f(x)$, dann ist K **punktsymmetrisch zum Ursprung.**

Wenn keines von beiden zutrifft, dann heißt dies aber nicht, dass die Kurve keine Symmetrie aufweist. Denn es kann durchaus eine andere Art von Symmetrie geben.
Man schreibt dann als Ergebnis auf: K hat keine (auf diese Weise) erkennbare Symmetrie.

Um andere Symmetriearten nachzuweisen, braucht man andere Methoden.

Nun zur gegebenen Funktion: $f(-x) = (0{,}5 - \cos(-x))^2$

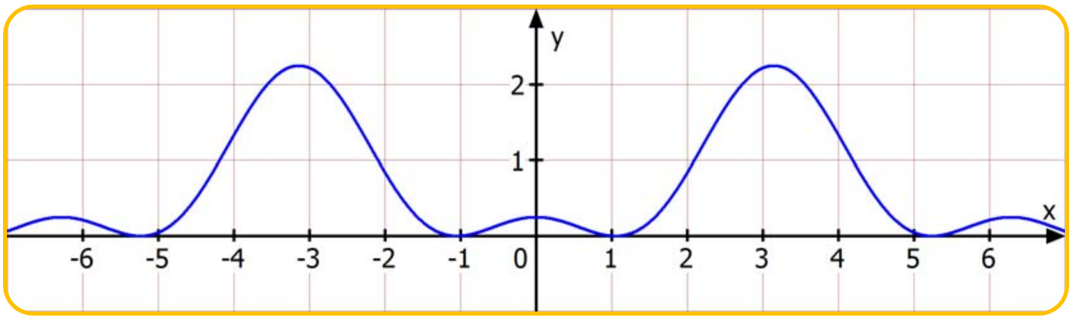
Jetzt muss man wissen, dass die einfache Kosinuskurve symmetrisch zur y-Achse ist, denn es gilt: $\cos(-x) = \cos(x)$

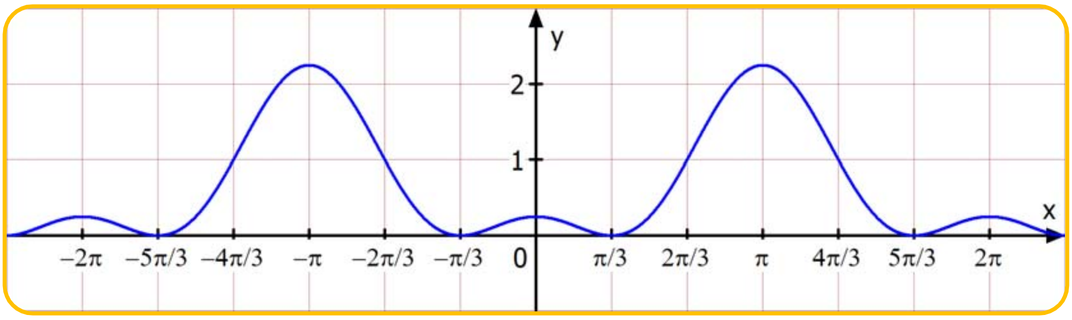
Damit folgt: $f(-x) = (0{,}5 - \cos(x))^2$

Und dann erkennt man: $f(-x) = f(x)$

Ergebnis: K ist symmetrisch zur y-Achse.

Ich zeige das Schaubild auf zwei Arten:





Wenn man die Einheit auf der x-Achse als 1 LE= $\frac{1}{3}\pi$ wählt, wird die Kurve etwas genauer

⇒ 2

$\boxed{2}$ Sinus- und Kosinuskurven sind sehr oft periodisch.

Wie findet man dies bei $f(x) = (0{,}5 - \cos(x))^2$ heraus?

Etwa, indem man sich an der Zeichnung orientiert und den Kurvenabschnitt zwischen den beiden „hohen“ Hochpunkten als eine Periode ansieht.

Man kann an Hand der Zeichnung vermuten, dass diese Strecke die Länge $\Delta x = 2\pi$ hat.

Wir behaupten also: f bzw. K hat die Periode $\Delta x = 2\pi$.

Dazu müssen wir beweisen: $f(x + 2\pi) = f(x)$

Linke Seite: $f(x + 2\pi) = (0{,}5 - \cos(x + 2\pi))^2$

Die Funktion $\cos(x)$ hat die Periode 2π, also gilt $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

Daher folgt: $f(x + 2\pi) = (0{,}5 - \cos(x + 2\pi))^2 = (0{,}5 - \cos(x))^2 = f(x)$, (S)

was zu beweisen war.

Solche Lösungen sind für Schüler nicht einfach, weil man oft nicht weiß, wie man das alles formulieren soll. Wichtig ist auf jeden Fall die Gleichung (S) und eine verbale Begründung dazu.

Die nächste Aufgabe für dich heißt:

Bestimme die Nullstellen von f.

$\Rightarrow \boxed{3}$

$\boxed{3}$ Gesucht sind die **Nullstellen** von $f(x) = (0{,}5 - \cos(x))^2$.

Bedingung: $f(x) = 0 \iff (0{,}5 - \cos(x))^2 = 0 \iff \cos(x) = 0{,}5$

In $[0\,;2\pi]$ gibt es zwei Lösungen: Im 1. Feld: $x_{1,1} = \frac{1}{3}\pi$

und im 4. Feld: $x_{2,1} = 2\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi$.

Wegen der Periode 2π kann man beliebige ganzzahlige Vielfache von 2π dazu addieren und erhält folgende Formeln für die Nullstellen:

$\boxed{x_{1,z} = \frac{1}{3}\pi + z \cdot 2\pi \quad \left(= \frac{6z+1}{3} \cdot \pi\right)}$ und $\boxed{x_{2,z} = \frac{5}{3}\pi + z \cdot 2\pi \quad \left(= \frac{6z+5}{3} \cdot \pi\right)}$ für $z \in \mathbb{Z}$.

Wegen des Quadrats sind diese Nullstellen alle doppelte Nullstelle, also Berührpunkte, und zwar Tiefpunkte, weil ja $f(x) \geq 0$ ist!

$\boxed{4}$ Eine nicht ganz einfache Frage ist die nach der **Wertmenge** der Funktion f.

Ich zeige meine Methode:

Man weiß, dass für Kosinuswerte gilt: $-1 \leq \cos(x) \leq 1$

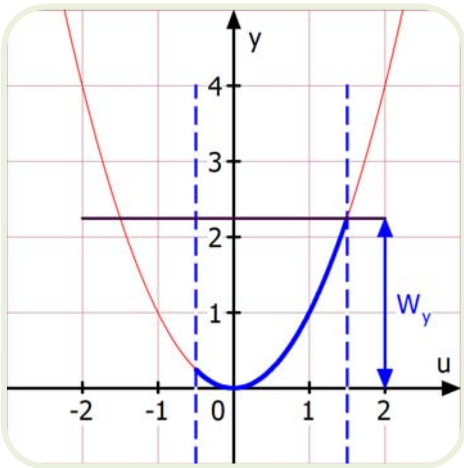
Wir subtrahieren 0,5: $-1{,}5 \leq \cos(x) - 0{,}5 \leq 0{,}5$

Mal (-1): $1{,}5 \geq \underbrace{0{,}5 - \cos(x)}_{u(x)} \geq -0{,}5$

Die Werte der Klammer-Funktion $u(x) = 0{,}5 - \cos(x))$ liegen also im Intervall $\mathbb{W}_u = [-0{,}5\,;1{,}5]$.

Die gegebene Funktion f kann man damit so schreiben:

$$y = f(x) = (u(x))^2.$$



Wegen des Quadrats ist der kleineste y-Wert 0, und der größte Wert aus $f(\mathbb{W}_y)$ ist $-1{,}5^2 = 2{,}25$.

Daher ist die Wertmenge von f $\mathbb{W}_f = [\ 0\ ;2{,}25\ ]$

Aufgabe:

Berechne zwei Ableitungen!

$\Rightarrow$ $\boxed{5}$

$\boxed{5}$ Gesucht sind zwei Ableitungen von $f(x) = (0{,}5 - \cos(x))^2$

$$f'(x) = 2 \cdot \left(0{,}5 - \cos(x)\right) \cdot \sin(x) = \left(1 - 2 \cdot \cos(x)\right) \cdot \sin(x)$$

Hier wurde die Kettenregel angewandt.

$\boxed{\text{GW}}$ Schreibt man $f(x) = (u(x))^2$, dann besagt die Kettenregel:

$f'(x) = 2 \cdot u(x) \cdot u'(x)$.

mit $u(x) = 0{,}5 - \cos(x)$ und $u'(x) = \sin(x)$ („innere Ableitung“).

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 2 \cdot (0{,}5 - \cos(x)) \cdot \sin(x) = \underbrace{(1 - 2 \cdot \cos(x))}_{u} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v}$$

Für die 2. Ableitung benötigt man die **Produktregel**: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$f''(x) = \underbrace{(-2 \cdot (-\sin(x)))}_{u'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v} + \underbrace{(1 - 2\cos(x))}_{u} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{v'}$$

$$f''(x) = 2 \cdot \underbrace{\sin^2(x)}_{1-\cos^2(x)} + \cos(x) - 2 \cdot \cos^2(x) = 2 - 2 \cdot \cos^2(x) + \cos(x) - 2 \cdot \cos^2(x)$$

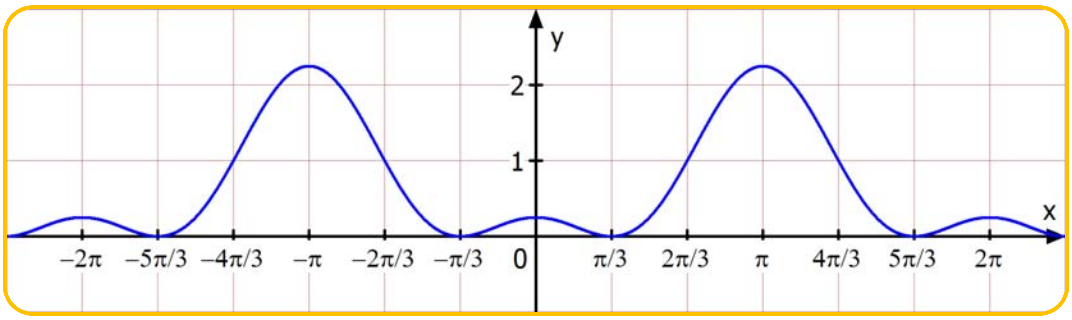
$$f''(x) = -4\cos^2(x) + \cos(x) + 2$$

Das ist bestes Übungsmaterial!!!

Bestimme nun die Extrempunkte für das Intervall $[-2\pi ; 2\pi]$

Diese Zeichnung hilft dabei!

$\Rightarrow \boxed{6}$



$\boxed{6}$

Bestimmung der Extrempunkte

Dazu brauchen wir: $f(x) = (0{,}5 - \cos(x))^2$

$f'(x) = (1 - 2\cdot\cos(x))\cdot\sin(x)$

$f''(x) = -4\cos^2(x) + \cos(x) + 2$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0 \mid \quad \Leftrightarrow \quad (1-2\cdot\cos(x))\cdot\sin(x) = 0$ *Nullprodukt !*

1\. Faktor: $1 - 2\cdot\cos(x) = 0$

$1 = 2\cdot\cos(x)$

$\frac{1}{2} = \cos(x)$

Lösung im 1. Feld: $x_1 = \frac{1}{3}\pi \approx 1{,}047$

Lösung im 4. Feld: $x_2 = 2\pi - x_1 = \frac{5}{3}\pi$

Wegen der Symmetrie zur y-Achse: $x_3 = -1{,}047$ und $x_4 = -\frac{5}{3}\pi$

2\. Faktor: $\sin(x) = 0$ mit $x_5 = 0$

$x_6 = \pi$ und $x_7 = 2\pi$

$x_8 = -\pi$ und $x_9 = -2\pi$.

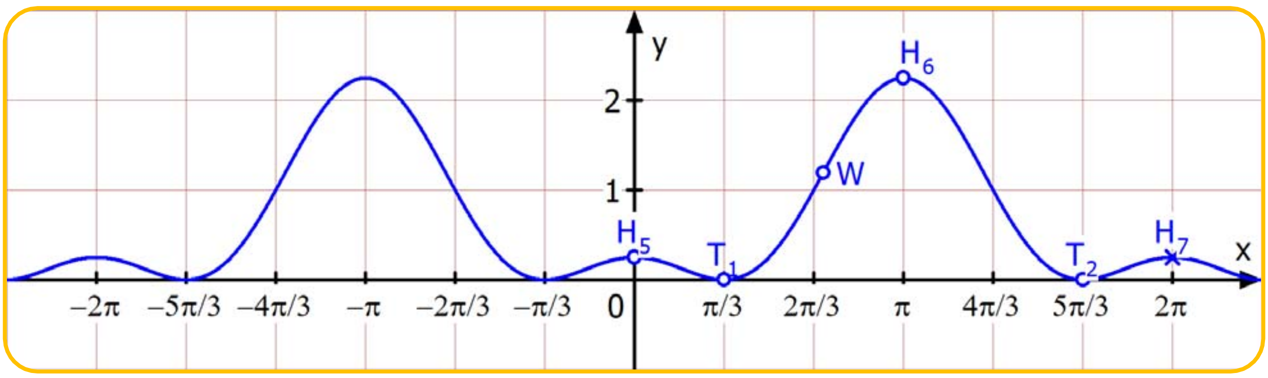
Hinreichende Bedingung: $f''\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -4\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2 = -4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 2 = -1 + \frac{5}{2} > 0$

y-Koordinate: $f\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \left(0{,}5 - \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right)^2 = (0{,}5 - 0{,}5)^2 = 0$

Somit ist $T_1\left(\frac{1}{3}\pi \mid 0\right)$ ein Tiefpunkt. $H(0 \mid 2{,}25)$ ist Hochpunkt

usw. Es ist $H_6(\pi \mid 2{,}25)$ usw.

(Ich rechne die weiteren Punkte nicht mehr vor.)



Bestimme nun den Wendepunkt W im 2. Feld.

$\Rightarrow \boxed{7}$

7 Bestimmung des Wendepunkts im 2. Feld.

Dazu brauchen wir: $f(x) = (0{,}5 - \cos(x))^2$

$f''(x) = -4\cos^2(x) + \cos(x) + 2$

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4\cos^2(x) + \cos(x) + 2 = 0$

Diese quadratische Gleichung für cos(x) wird „handlicher", wenn man sie durch die **Substitution** $u = \cos(x)$ vereinfacht zu $-4u^2 + u + 2 = 0$.

Lösungsformel: $u_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-4) \cdot 2}}{2 \cdot (-4)} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{33}}{-8} \approx \begin{cases} -0{,}593 \\ 0{,}843 \end{cases}$

Rücksubstitution durch $\cos(x) = u$:

1. Fall: $\cos(x) = -0{,}593 \quad \Rightarrow$ cos(x) < 0 im 2. und 3. Feld.

2. Fall: $\cos(x) = 0{,}843. \quad \Rightarrow$ cos(x) > 0 im 1. und 4. Feld.

In dieser Aufgabe soll man nur den Wendepunkt bestimmen, der im 2. Feld liegt, also im Intervall $\left[\frac{1}{2}\pi ; \pi\right] \approx [1{,}58 ; 3{,}14]$. Daraus folgen diese Lösungen für x:

$\cos(x) = -0{,}593 \quad \Rightarrow$ im **2. Feld:** **x = 2,206**

y-Koordinate: $f(2{,}206) = 1{,}1947$

Hinreichende Bedingung: Da 2,206 eine einfache Nullstelle von f'' ist, liegt Krümmungswechsel vor.

Ergebnis: $W(2{,}21 | 1{,}19)$ ist ein Wendepunkt.

Neue Zusatzfrage:

Es gibt eine ganzrationale Funktion g 4. Grades, deren Graph im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ dieselben Extrempunkte hat wie K.
Stelle die Gleichung von g auf.

⇒ 8

$\boxed{8}$ **Gesucht ist g:**

Ansatz: $\boxed{g(x) = ax^4 + bx^2 + c}$ mit $g'(x) = 4ax^3 + 2bx$.

(1) $H(0\,|\,2{,}25)$: Wegen $g(0) = 0{,}25$: **c = 0,25 = $\frac{1}{4}$**

(2) $T(\frac{\pi}{3}\,|\,0)$ Wegen $g(\frac{\pi}{3}) = 0$: $0 = a\cdot\frac{\pi^4}{81} + b\cdot\frac{\pi^2}{9} + \frac{1}{4}$

(3) T ist Tiefpunkt: Wegen $g'(\frac{\pi}{3}) = 0$ $0 = 4a\cdot\frac{\pi^3}{27} + 2b\cdot\frac{\pi}{3}$

Zur Elimination von a wird (2) verändert:

Man multipliziert diese Gleichung **mit 4 und mit 3**: $0 = a\cdot\frac{\pi^4}{81}\cdot 4\cdot 3 + b\cdot\frac{\pi^2}{9}\cdot 4\cdot 3 + \frac{1}{4}\cdot 4\cdot 3$

ergibt: $0 = \boxed{4a\cdot\frac{\pi^4}{27}} + 4b\cdot\frac{\pi^2}{3} + 3$ (4)

Und Gleichung (3) wird mit π multipliziert: $0 = \boxed{4a\cdot\frac{\pi^4}{27}} + 2b\cdot\frac{\pi^2}{3}$ (5)

(4) – (5): $0 = 4b\cdot\frac{\pi^2}{3} + 3 - 2b\cdot\frac{\pi^2}{3}$

Umstellen nach b: $4b\cdot\frac{\pi^2}{3} - 2b\cdot\frac{\pi^2}{3} = -3 \quad |\cdot 3$

$4b\pi^2 - 2b\pi^2 = -9$

$2b\pi^2 = -9 \quad | : 2\pi^2$

$b = -\frac{9}{2\pi^2}$

In (3): $0 = 4a\cdot\frac{\pi^3}{27} - 2\cdot\frac{9}{2\pi^2}\cdot\frac{\pi}{3}$

Kürzen: $0 = 4a\cdot\frac{\pi^3}{27} - \frac{3}{\pi}$

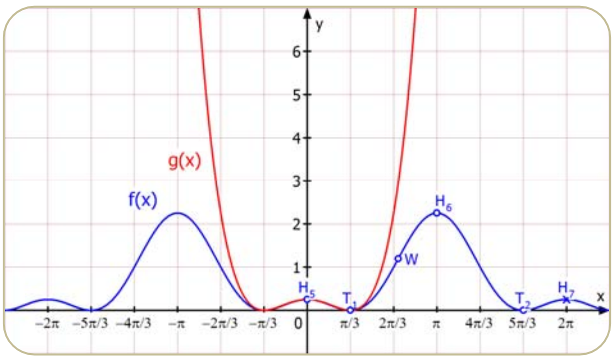
Umstellen nach a: $4a\cdot\frac{\pi^3}{27} = \frac{3}{\pi} \quad | : \frac{4\pi^3}{27}$ bzw. $\cdot\frac{27}{4\pi^3}$

$a = \frac{3\cdot 27}{\pi\cdot 4\pi^3} = \frac{81}{4\pi^4}$

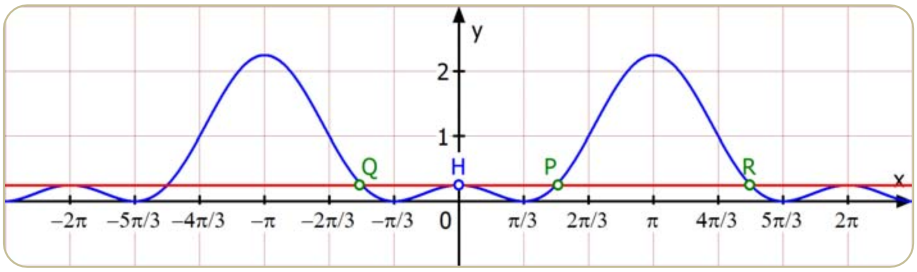
Ergebnis: $\boxed{g(x) = \frac{81}{4\pi^4}x^4 - \frac{9}{2\pi^2}x^2 + \frac{1}{4}}$

bzw. näherungsweise: $g(x) = 0{,}208\cdot x^4 - 0{,}456\cdot x^2 + 0{,}25$

$\Rightarrow$ $\boxed{9}$



$\boxed{9}$



Die Parallele zur x-Achse durch den Hochpunkt $H(0\,|\,0{,}25)$ schneidet K in mehreren Punkten. Zeige durch Rechnung, dass die Strecken PQ und QR gleich lang sind.

Beweis. Berechnung der Schnittpunkte: $f(x) = \frac{1}{4} - \cos(x) + \cos^2(x)$

Schnittgleichung: $\frac{1}{4} - \cos(x) + \cos^2(x) = \frac{1}{4} \quad | -\frac{1}{4}$

$-\cos(x) + \cos^2(x) = 0$

$\cos(x)(-1 + \cos(x)) = 0$ Nullprodukt.

1. Faktor: $\cos(x) = 0$ mit $x_P = \frac{1}{2}\pi$, $x_Q = -\frac{1}{2}\pi$, $x_R = \frac{3}{2}\pi$

2. Faktor: $-1 + \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 1 \Leftrightarrow x_H = 0$ u.a.

Die y-Koordinaten sind alle 0,25 bzw. $\frac{1}{4}$.

Ergebnis: $P\left(\frac{1}{2}\pi \,|\, \frac{1}{4}\right)$, $Q\left(-\frac{1}{2}\pi \,|\, \frac{1}{4}\right)$. $R\left(\frac{3}{2}\pi \,|\, \frac{1}{4}\right)$

Längen der Teilstrecken: $\overline{PQ} = x_P - x_Q = \frac{1}{2}\pi - \left(-\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi = \pi$

$\overline{QR} = x_R - x_Q = \frac{3}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi = \pi$

Damit reicht es für heute!

CIAO !